

Integrazione per sostituzione

Regola della catena : Se G è una primitiva di g ($G' = g$ oppure $G \in \int g(t) dt$) allora $(G \circ f)' = G'(f) \cdot f' = (g \circ f) \cdot f'$

Pertanto
$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + c = \int g(t) dt \Big|_{t=f(x)}$$

CAMBIAMENTO di VARIABILE

$$t = f(x) \quad \frac{dt}{dx} = f'(x) \rightsquigarrow dt = f'(x) dx$$

Definizione Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Si dice f è di classe C^1 in I se f è derivabile e f' è continua in I

L'insieme di tutte le funzioni di classe C^1 in I è denoto $C^1(I)$

Più in generale, se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, si dice che f è di classe C^k in I se f è derivabile k -volte in I e $f', f'', \dots, f^{(k)}$ sono funzioni continue in I e l'insieme delle funzioni di classe C^k su I è denoto con $C^k(I)$

Teorema (FORMULA del CAMBIAMENTO di VARIABILE)

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Sia $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(f(x)) f'(x) dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} g(t) dt$$

NB : nel teorema applichiamo il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} t = f(x) & \rightsquigarrow dt = f'(x) dx \\ x = \alpha & \Rightarrow t = f(\alpha) \\ x = \beta & \Rightarrow t = f(\beta) \end{aligned}$$

Esempi

$$1) \int e^{x^2} \cdot x dx \underset{\uparrow}{=} \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{e^t}{2} + c = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$2) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{1+t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t}{t+1} dt$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt$$

$$= 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t - 2 \ln |t+1| + c$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + c$$

$$3) \int \frac{1}{x^2+3} dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{3t^2+3} \sqrt{3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan t + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$t = \frac{x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} t \\ dx = \sqrt{3} dt$$

Esercizi di preparazione all'esame scritto

1. a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x-2}{4x^2-1} dx$

[Esame 7/9/22]

b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx$

soluzione: a) $\int \frac{3x-2}{4x^2-1} dx$ il numeratore ha grado minore del denominatore

Il denominatore ammette due radici reali e distinte $x = \pm \frac{1}{2}$

ovvero $4x^2-1 = 4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = (2x+1)(2x-1)$

Decomponiamo la funzione integranda in fratti semplici:

determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{3x-2}{4x^2-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + B(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{2(A+B)x - A+B}{4x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(A+B) = 3 \\ -A+B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = \frac{3}{2} \\ -A+B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = -\frac{1}{2} \\ A = B+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ A = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{4x^2-1} dx &= \int \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{2x-1} \right) dx \\ &= \frac{7}{8} \int \frac{2}{2x+1} dx - \frac{1}{8} \int \frac{2}{2x-1} dx \\ &= \frac{7}{8} \ln|2x+1| - \frac{1}{8} \ln|2x-1| + C \end{aligned}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{3t-2}{4t^2-1} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{3t-2}{4t^2-1} dt$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \\ x=0 &\Rightarrow t = \cos 0 = 1 \\ x=\frac{\pi}{6} &\Rightarrow t = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

appliciamo il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{3t-2}{4t^2-1} dt \\ &= \left. \frac{7}{8} \ln|2t+1| - \frac{1}{8} \ln|2t-1| \right|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \\ &= \frac{7}{8} \ln 3 - \frac{1}{8} \ln 1 - \left(\frac{7}{8} \ln(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{8} \ln(\sqrt{3}-1) \right) \\ &= \frac{7}{8} (\ln 3 - \ln(\sqrt{3}+1)) + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

2. a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{2x+1}{3x^2+1} dx$

[Esame 18/7/22]

b) Calcolare l'integrale $\int_1^e \frac{2 \log x + 1}{x(3 \log^2 x + 1)} dx$

svolgimento: a) Il denominatore ha discriminante negativo

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$2x+1 = A(6x) + B \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{3x^2+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{6x}{3x^2+1} dx + \int \frac{1}{3x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log(3x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log(3x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}x) + C \end{aligned}$$

$$b) \int_1^e \frac{2 \log x + 1}{x(3 \log^2 x + 1)} dx = \int_0^1 \frac{2t+1}{3t^2+1} dt$$

$$t = \log x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$x = 1 \Rightarrow t = \log 1 = 0$$

$$x = e \Rightarrow t = \log e = 1$$

appliciamo il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2t+1}{3t^2+1} dt &= \frac{1}{3} \log(3t^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{3} \log 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \log 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan 0 \\ &= \frac{2}{3} \log 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

3. a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{2x+1}{3x^2+x} dx$

[Esame 4/7/22]

b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\ln 5} \frac{2e^x+1}{3e^x+1} dx$

Svolgimento: a) Fattorizziamo il denominatore

$$3x^2+x = x(3x+1)$$

Scriviamo la funzione integrando come somma di parti semplici.

A, B, R tali che

$$\frac{2x+1}{3x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+1} = \frac{A(3x+1) + Bx}{x(3x+1)} = \frac{(3A+B)x + A}{x(3x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3A+B=2 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2-3A=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{3x^2+x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x+1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C \end{aligned}$$

$$b) \int_0^{\ln 5} \frac{2e^x+1}{3e^x+1} dx \stackrel{\uparrow}{=} \int_1^5 \frac{2t+1}{3t+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^5 \frac{2t+1}{3t^2+t} dt$$

$$\begin{aligned} t=e^x &\Leftrightarrow x=\ln t \\ dx &= \frac{1}{t} dt \\ x=0 &\Rightarrow t=e^0=1 \\ x=\ln 5 &\Rightarrow t=e^{\ln 5}=5 \end{aligned}$$

teoremi fondamentali del calcolo integrale

$$= \ln|t| - \frac{1}{3} \ln|3t+1| \Big|_1^5$$

$$= \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 16 - \ln 1 + \frac{1}{3} \ln 4$$

$$= \ln 5 - \frac{1}{3} (\ln 16 - \ln 4) = \ln 5 - \frac{2}{3} \ln 2$$

4. a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{1}{2x^2-3x-2} dx$
b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}(2x-3\sqrt{x}-2)} dx$

[Esame 22/6/22]

svolgimento: a) Determiniamo le radici del denominatore

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{4} \quad \begin{matrix} < -\frac{1}{2} \\ > 2 \end{matrix}$$

Fattorizziamo il denominatore

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2) = (2x+1)(x-2)$$

Decomponiamo la funzione integranda in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^2-3x-2} &= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+2B)x - 2A+B}{2x^2-3x-2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+2B=0 \\ -2A+B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-2B \\ 5B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{2}{5} \\ B=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2-3x-2} dx &= \int \left(-\frac{2}{5} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{5} \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{5} \int \frac{2}{2x+1} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\frac{1}{5} \ln|2x+1| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{2x+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$b) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}(2x-3\sqrt{x}-2)} dx \quad \stackrel{\uparrow}{=} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2t^2-3t-2} dt$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$\Downarrow$

$$x = t^2$$

$$x=0 \Rightarrow t=\sqrt{0}=0$$

$$x=\frac{1}{4} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2t^2-3t-2} dt &= \frac{2}{5} \ln \left| \frac{t-2}{2t+1} \right| \bigg|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{5} \ln \left| \frac{\frac{1}{2}-2}{2 \cdot \frac{1}{2}+1} \right| - \frac{2}{5} \ln \left| \frac{-2}{1} \right| \\ &= \frac{2}{5} \ln \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \ln 2 = \frac{2}{5} (\ln \frac{3}{4} - \ln 2) \\ &= \frac{2}{5} \ln \frac{3}{8} \end{aligned}$$

5. a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{2x+5}{x^2-x-2} dx$

[Esame 20/4/22]

b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + 5) \cdot \cos x}{\sin^2 x - \sin x - 2} dx$

sviluppiamo: a) Il denominatore ha due radici reali:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Decomponiamo la funzione integranda in frazioni semplici,

cioè determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2x+5}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A-2B}{x^2-x-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A-2B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B=-3 \\ A=2-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=3 \end{cases}$$

principio di
identità tra
polinomi

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{x^2-x-2} dx &= \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= 3 \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= 3 \ln|x-2| - \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + 5) \cdot \cos x}{\sin^2 x - \sin x - 2} dx = \int_0^1 \frac{2t+5}{t^2-t-2} dt$$

$$\begin{aligned} t &= \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ x=0 &\Rightarrow t = \sin 0 = 0 \\ x=\frac{\pi}{2} &\Rightarrow t = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

appliciamo il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2t+5}{t^2-t-2} dt &= 3 \ln|t-2| - \ln|t+1| \Big|_0^1 \\ &= 3 \ln 1 - \ln 2 - 3 \ln 2 + \ln 1 \\ &= -4 \ln 2 \end{aligned}$$

6. a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx$
 b) Calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^6+2x^3+5} dx$

[Esame 21/2/22]

svolgimento: a) Calcoliamo il discriminante del denominatore

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$$

le radici complesse e coniugate del denominatore sono

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$\begin{aligned} x^2+2x+5 &= (x+1-2i)(x+1+2i) \\ &= (x+1)^2 - (2i)^2 = (x+1)^2 + 4 = 4 \left[\frac{(x+1)^2}{4} + 1 \right] \\ &= 4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$x = A(2x+2) + B \quad \Leftrightarrow \quad x = 2Ax + 2A + B$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -2A = -1 \end{cases} \\ &\text{principio di identità tra polinomi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^6+2x^3+5} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3} \frac{x^3 \cdot 3x^2}{x^6+2x^3+5} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3} \frac{t}{t^2+2t+5} dt$$

$$t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$x = -1 \Rightarrow t = (-1)^3 = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 1^3 = 1$$

teorema fondamentale
del calcolo integrale

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln(t^2+2t+5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t+1}{2}\right) \right) \Big|_{t=-1}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{6} (\ln 8 - \arctan 1 - \ln 4 + \arctan 0)$$

$$= \frac{1}{6} (\ln 2 - \frac{\pi}{4})$$

Cosa succede se il denominatore ha grado ≥ 3 ?

L'idea di base è la stessa visto che il denominatore ha grado ≥ 2 : si determinano le radici del denominatore e se ne scrive una sua fattorizzazione. Consideriamo

$$B(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \quad \text{con } a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$$

Siano $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ le radici reali di $B(x)$ di molteplicità $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}^*$ rispettivamente e siano $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_q \pm i\beta_q \in \mathbb{C}$ le radici complesse coniugate di $B(x)$ di molteplicità $h_1, \dots, h_q \in \mathbb{N}^*$.

Allora $B(x)$ si fattorizza come segue

$$B(x) = a_0 (x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_p)^{k_p} \cdot ((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{h_1} \dots ((x-\alpha_q)^2 + \beta_q^2)^{h_q}$$

$$\text{cioè } k_1 + \dots + k_p + 2(h_1 + \dots + h_q) = m = \deg B$$

Teorema (di decomposizione in fratti semplici)

Sia $A(x)$ un polinomio di grado $\leq m-1$, allora esistono m costanti reali

$$A_{1,1}, \dots, A_{1,k_1}, \dots, A_{p,1}, \dots, A_{p,k_p}, B_{1,1}, C_{1,1}, \dots, B_{1,h_1}, C_{1,h_1}, \dots, B_{q,1}, C_{q,1}, \dots, B_{q,h_q}, C_{q,h_q}$$

tales che

$$\begin{aligned} \frac{A(x)}{B(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots + \\ & + \frac{A_{p,1}}{x-x_p} + \dots + \frac{A_{p,k_p}}{(x-x_p)^{k_p}} \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2]^2} + \dots + \frac{B_{1,h_1}x + C_{1,h_1}}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{h_1}} \\ & + \dots + \frac{B_{q,1}x + C_{q,1}}{(x-\alpha_q)^2 + \beta_q^2} + \dots + \frac{B_{q,h_q}x + C_{q,h_q}}{[(x-\alpha_q)^2 + \beta_q^2]^{h_q}} \end{aligned}$$

La scrittura precedente si chiama DECOMPOSIZIONE in FRATTI SEMPLICI di $\frac{A(x)}{B(x)}$

Osserviamo esplicitamente che i fratti semplici associati alle radici reali si possono integrare usando le regole di integrazione elementare

$$\int \frac{A_{j,l}}{(x-x_j)^l} dx = \begin{cases} A_{j,1} \ln|x-x_j| & \text{se } l=1 \\ \frac{A_{j,l}}{(1-l)(x-x_j)^{l-1}} & \text{se } l \geq 2 \end{cases}$$

mentre per i fratti associati alle radici complesse coniugate abbiamo visto come

integrare i termini $\frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{(x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2}$ (denominatore di secondo grado con $\Delta < 0$)

ma non sappiamo integrare i termini $\frac{B_{j,l}x + C_{j,l}}{[(x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2]^l}$ con $l \geq 2$, che compaiono in presenza di radici complesse multiple.

Sottolineiamo che esiste una formula risolutiva per $\int \frac{B_{j,l}x + C_{j,l}}{[(x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2]^l} dx$ per $l \geq 2$ la cui conoscenza va però oltre gli scopi del nostro corso.